

# Mouvement des particules chargées dans les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$

## I. La force de Lorentz

- *Expression de la force de Lorentz*

Dans les précédents chapitres d'électromagnétisme, nous avons appris à déterminer le champ électrique  $\vec{E}$  (créé par des charges fixes) et le champ magnétique  $\vec{B}$  (créé par des courants).

Dans ce chapitre, nous allons étudier la trajectoire d'une particule chargée soumise à ces champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ .

La force électromagnétique (force de Lorentz) subie par une particule de charge  $q$  en mouvement à la vitesse  $\vec{v}$  dans un champ électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  s'écrit :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{F}_{\text{électrique}} + \vec{F}_{\text{magnétique}}$$

- *Puissance de la force de Lorentz*

La puissance de la force de Lorentz vérifie :  $P = \vec{F} \cdot \vec{v} = (q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v} = \vec{F}_{\text{électrique}} \cdot \vec{v}$   
Ainsi  $P = P_{\text{électrique}}$  et **la force magnétique ne travaille pas** ( $P_{\text{magnétique}} = 0$ ).

**Si la particule n'est soumise qu'à la force de Lorentz** alors le théorème de l'énergie cinétique donne :  
 $dE_c = \delta W = \delta W_{\text{électrique}}$  avec  $\delta W_{\text{électrique}} = -d(qV) = -dE_p$  d'après le chapitre sur le potentiel électrostatique (II.2). Par conséquent  $dE_c = -dE_p$  soit  $dE_m = 0$  et **l'énergie mécanique de la particule se conserve au cours du mouvement** (l'unique force qui travaille - force électrique - est conservative) :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{constante}.$$

## II. Particule chargée dans un champ $\vec{E}$ uniforme et permanent

### 1. Equation de la trajectoire

Hypothèses de l'étude :

- On suppose que la particule se déplace dans le vide (afin de s'affranchir des collisions avec les autres particules du milieu) où règne un champ électrique  $\vec{E}$  uniforme et permanent ( $\vec{E} = \text{constante}$ ).
- On néglige le poids de la particule devant la force électrique :  $\|\vec{F}_{\text{électrique}}\| \gg \|\vec{P} = m\vec{g}\|$  (voir chapitre Champ électrostatique)

**Le principe fondamental de la dynamique** appliqué à la particule M (masse  $m$ , charge  $q$ ) soumise uniquement à la force électrique, dans un référentiel galiléen s'écrit :  $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{électrique}}$  soit  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$

Par intégrations successives (à l'instant initial ( $t=0$ ) la particule est au point  $M_0$  à la vitesse  $\vec{v}_0 = \vec{v}(t=0)$ ) il vient :

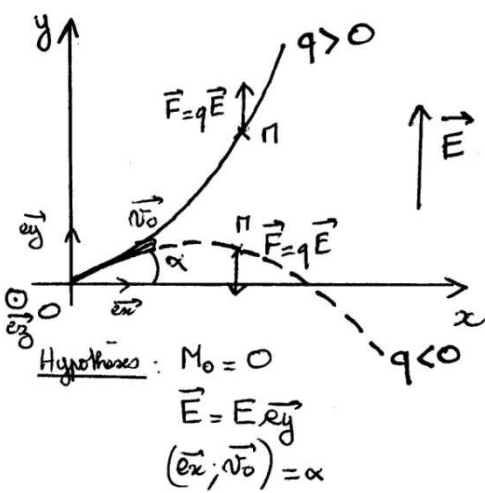
$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{E}t + \vec{v}_0$$

$$\vec{OM} = \frac{q}{2m}\vec{E}t^2 + \vec{v}_0t + \vec{OM}_0 \quad (1)$$

Remarque :

On retrouve le même type d'équation que dans l'étude du mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur terrestre uniforme sans résistance de l'air faite dans le chapitre 2 de mécanique.

• **Mouvement parabolique** ( $\vec{v}_0$  quelconque)

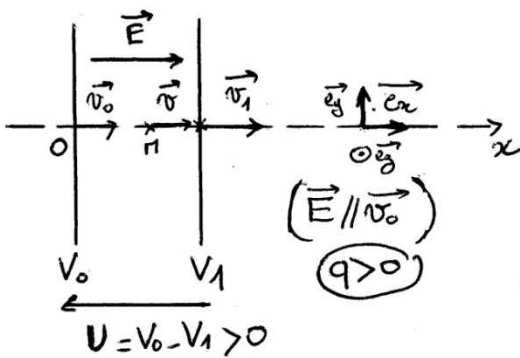


• L'équation (1) projetée suivant les trois vecteurs unitaires  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  donne :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha) t \\ y = \frac{qE}{2m} t^2 + v_0 \sin(\alpha) t \\ z = 0 \end{cases}$$

Le mouvement est plan ( $xOy$ ), l'équation cartésienne de la trajectoire est :  $y = \frac{qE}{2m v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$   
parabole.

**2. Accélération linéaire d'une particule** ( $\vec{E}$  colinéaire à  $\vec{v}_0$ )



• Le champ  $\vec{E}$  est créé par 2 électrodes parallèles de potentiels  $V_0$  et  $V_1$  telles que  $V_0 > V_1$ .  
 Ainsi  $\vec{E} = E \vec{e}_x$  ( $E > 0$  : sens des potentiels décroissants d'après  $\vec{E} = -\text{grad } V$ )  
 • A  $t=0$ , la particule  $M(q, m)$  est en  $O$  à la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ .

• L'équation (1) projetée suivant  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  donne :

$$\begin{cases} x = \frac{qE}{2m} t^2 + v_0 t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

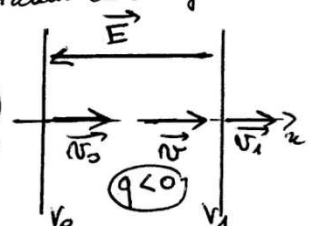
Le mouvement est rectiligne suivant  $(Ox)$   
 Si  $q > 0$  : mouvement uniformément accéléré  
 $\vec{F} = q\vec{E} = \overset{\text{PFD}}{qE} = m\vec{a}$  suivant  $+\vec{e}_x$ .

• D'après la conservation de l'énergie mécanique on obtient :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + qV_0 = \frac{1}{2} m v_1^2 + qV_1 \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 + \frac{2qU}{m} \quad \boxed{v_1 > v_0 \text{ si } qU > 0}$$

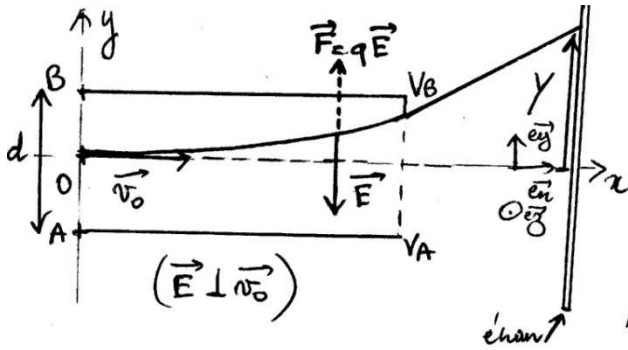
• Remarque : la représentation ci-dessus correspond à un accélérateur de charges positives (exemple : protons)

Si on souhaite accélérer des charges négatives (exemple : électrons) il faut prendre  $U < 0$  soit  $V_0 < V_1$  d'où  $\vec{E} = E \vec{e}_x$  ( $E < 0$ )  
 $(\vec{F} = q\vec{E}$  suivant  $+\vec{e}_x$ )



Application : canon à électrons d'un tube cathodique (voir TP cours instrumentation électrique)

### 3. Déflexion électrostatique ( $\vec{E}$ orthogonal à $\vec{v}_0$ )



• Le champ est créé par un condensateur plan constitué de deux armatures planes, parallèles distantes de  $d$  et portées aux potentiels :  $V_A = 0$  et  $V_B = U > 0$ .  
Ainsi  $\vec{E} = E \vec{e}_y$  ( $E < 0$ )

• L'équation (1) projetée suivant  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  donne :

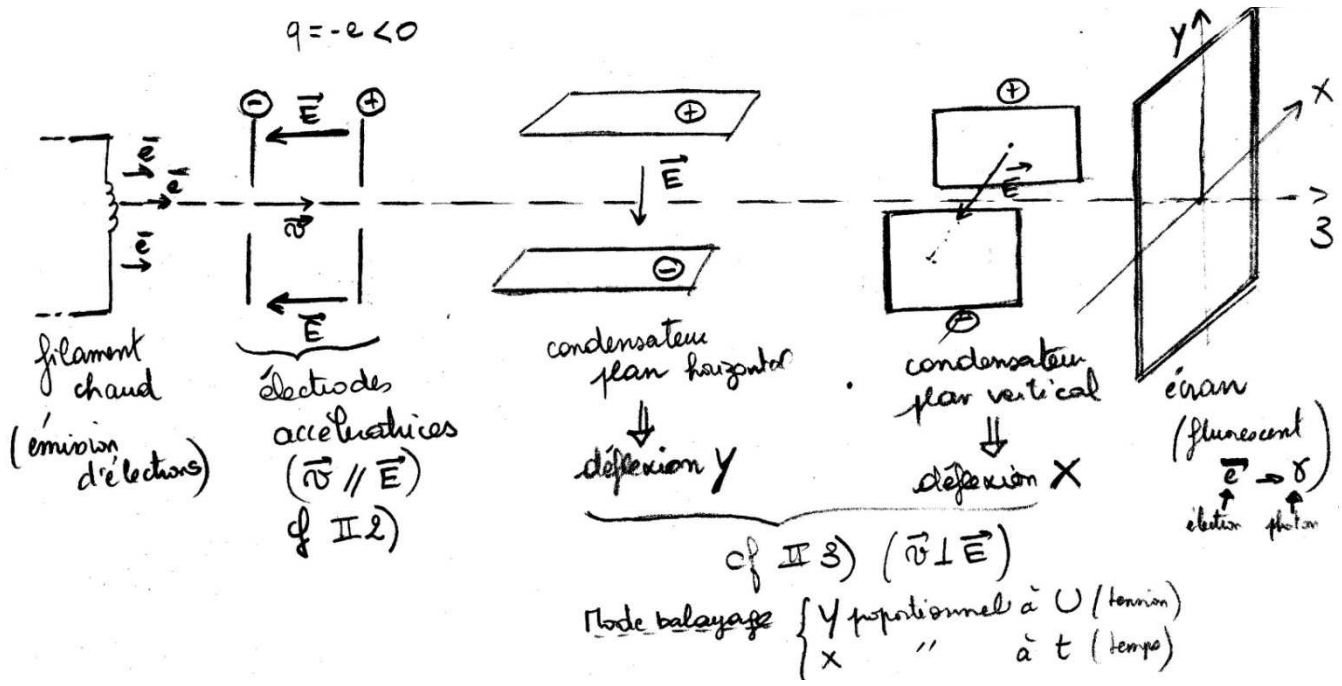
$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = \frac{qEt^2}{2m} \\ z = 0 \end{cases}$$

Le mouvement est plan ( $xOy$ ) et l'équation cartésienne de la trajectoire est  $y = \frac{qE}{2mv_0^2} x^2$  (parabole)  
Dérivé dans le cas  $q < 0$  (exemple : électrons)  
(trajectoire rectiligne à l'extérieur du condensateur :  $\vec{F} = 0$  car  $\vec{E} = \vec{0}$  d'où  $\vec{a} = \vec{0}$  et  $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$ )

#### Applications :

- La déflexion  $Y$  est proportionnelle au rapport  $\frac{q}{m}$ ,  $U$  étant fixée (spectromètre de masse...)
- La déflexion  $Y$  est proportionnelle à  $U$  ( $U = \|\vec{E}\|d$ ),  $\frac{q}{m}$  étant fixé (tube cathodique d'un oscilloscope...)

### 4. Application à l'oscilloscope (voir TP cours instrumentation électrique)



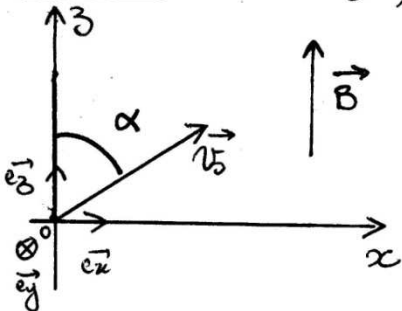
### III. Particule chargée dans un champ $\vec{B}$ uniforme et permanent

#### 1. Propriétés générales du mouvement

Comme dans le cas du champ électrique, on néglige le poids devant la force magnétique :  $\|\vec{F}_{\text{magnétique}}\| \gg \|\vec{P} = m\vec{g}\|$ . D'après la conservation de l'énergie mécanique il vient  $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + qV = \text{constante}$ . Or la particule n'est soumise qu'à un champ  $\vec{B}$  d'où  $\vec{E} = \vec{0}$  soit  $V = \text{constante}$  ( $\vec{E} = -\text{grad}V$ ). Par conséquent  $v^2 = \text{constante}$  soit  $\|\vec{v}\| = \text{constante}$  : contrairement au champ  $\vec{E}$ , le champ  $\vec{B}$  n'accélère pas les particules chargées, le mouvement est uniforme.

#### 2. Equation de la trajectoire

On choisit :  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  ;  $\alpha = (\vec{B}, \vec{v}_0)$  d'où  $\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{e}_x + v_{0z}\vec{e}_z$  avec



$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \sin \alpha \\ v_{0z} = v_0 \cos \alpha \end{cases}$$

• Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule  $\Pi(m, q)$  dans un référentiel galiléen s'écrit :

$$m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\text{Or } \vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y B \\ -v_x B \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où en projetant le PFD suivant  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  il vient :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y & (1) \\ \frac{dv_y}{dt} = \frac{qB}{m} (-v_x) & (2) \\ \frac{dv_z}{dt} = 0 & (3) \end{cases}$$

• Mouvement suivant  $(Oz)$

$$(3) \quad \frac{dv_z}{dt} = 0 \Rightarrow v_z = \text{cte} = v_{0z}$$

$$\text{Or } \frac{dz}{dt} = v_z \text{ d'où } \frac{dz}{dt} = v_{0z} \Rightarrow z = v_{0z} t = v_0 \cos \alpha t$$

Le mouvement est rectiligne uniforme suivant l'axe  $(Oz)$

• Mouvement dans le plan (xOy)

• On recherche la trajectoire par la méthode de la variable complexe. Pour cela on pose  $Z = x + iy$  (avec  $i^2 = -1$ ).

$$\text{Ainsi } \begin{cases} \dot{Z} = \frac{dZ}{dt} = \dot{x} + i\dot{y} = v_x + i v_y \\ \ddot{Z} = \frac{d^2Z}{dt^2} = \ddot{x} + i\ddot{y} = \frac{dv_x}{dt} + i \frac{dv_y}{dt} \end{cases}$$

• En effectuant la combinaison linéaire (1) + i(2) il vient :

$$\frac{dv_x}{dt} + i \frac{dv_y}{dt} = \frac{qB}{m} (v_y - i v_x) = -\frac{iqB}{m} (v_x + i v_y)$$

$$\Rightarrow \ddot{Z} = -\frac{iqB}{m} \dot{Z} = \frac{d\dot{Z}}{dt} \text{ qui donne } \dot{Z} = C_1 e^{\frac{-iqB}{m}t}$$

avec  $C_1 = \dot{Z}(0) = v_{0x} + i v_{0y} = v_{0x}$ .

Par conséquent  $\dot{Z} = v_{0x} e^{\frac{-iqB}{m}t}$

• Par intégration il vient  $Z = \frac{m v_{0x}}{-iqB} e^{\frac{-iqB}{m}t} + C_2$  avec

$$Z(0) = 0 = \frac{m v_{0x}}{-iqB} + C_2 \Rightarrow C_2 = -\frac{im v_{0x}}{qB}$$

Par conséquent  $Z = \frac{im v_{0x}}{qB} \left( e^{-\frac{iqB}{m}t} - 1 \right)$

$$\left. \begin{cases} x = \text{Re}(Z) \\ y = \text{Im}(Z) \\ e^{-\frac{iqB}{m}t} = \cos\left(\frac{qBt}{m}\right) - i \sin\left(\frac{qBt}{m}\right) \end{cases} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{m v_{0x}}{qB} \left[ \sin\left(\frac{qBt}{m}\right) \right] \\ y = \frac{m v_{0x}}{qB} \left[ \cos\left(\frac{qBt}{m}\right) - 1 \right] \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire est :  $x^2 + \left(y + \frac{m v_{0x}}{qB}\right)^2 = \left(\frac{m v_{0x}}{qB}\right)^2$

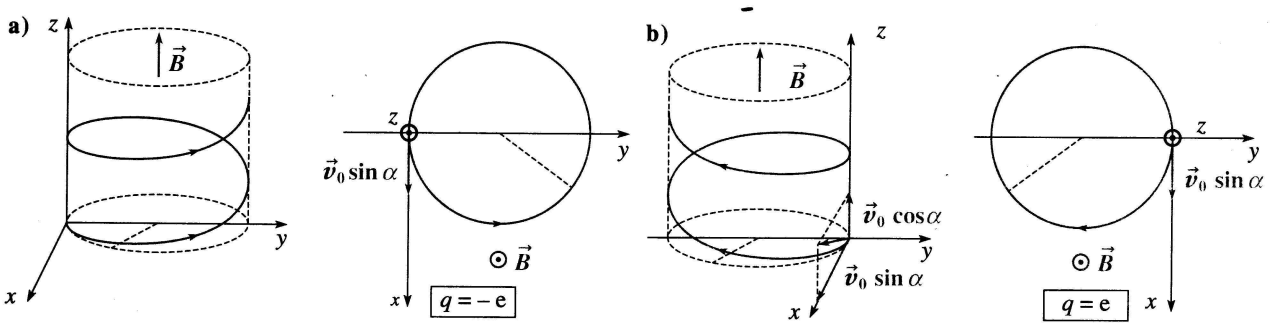
• Il s'agit d'un cercle de rayon  $R = \frac{m v_{0x}}{qB} = \frac{m v_0 \sin\alpha}{qB}$  et de centre  $(x_c, y_c)$  avec  $x_c = 0$  et  $y_c = -\frac{m v_{0x}}{qB} = -\frac{m v_0 \sin\alpha}{qB}$ .  $\left[ (x-x_c)^2 + (y-y_c)^2 = R^2 \right]$

• Ce cercle est décrit à la vitese angulaire constante  $\omega = \frac{qB}{m}$  appelée

subation cyclotron :  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{|q|B}$  est indépendante de  $v$ .

Le mouvement est circulaire uniforme dans le plan (xOy)

• **Mouvement hélicoïdal (mouvement global)**



• la particule décrit une hélice circulaire de pas  $\Delta z = (v_0 \cos \alpha) T$

soit  $\Delta z = \frac{2\pi m v_0 \cos \alpha}{|q| B}$ .

Cas particuliers \*  $\vec{B} \perp \vec{v}_0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  movt plan circulaire uniforme

\*  $\vec{B} \parallel \vec{v}_0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow$  movt rectiligne uniforme

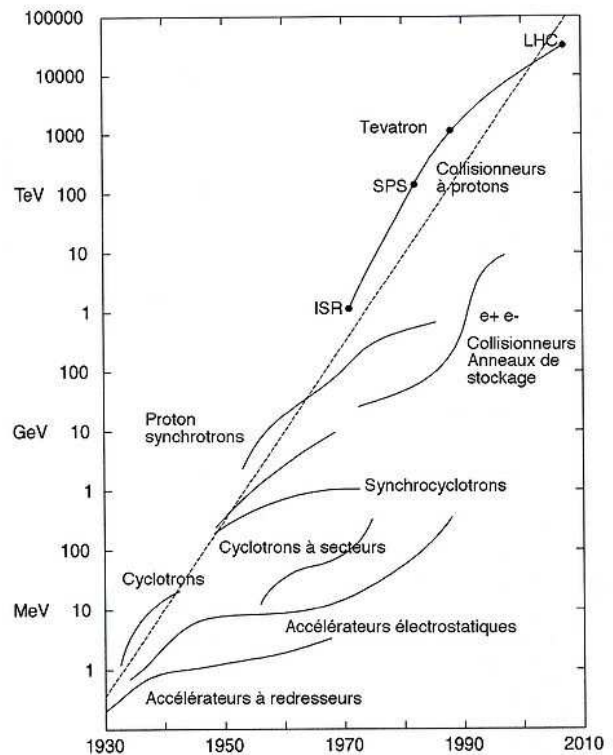
**IV. Application : Accélérateur de particules**

Un accélérateur de particules est une machine qui utilise des champs électriques et/ou magnétiques pour amener des particules à des vitesses élevées.

Il existe une multitude d'accélérateurs que l'on peut classer en deux grandes catégories : les accélérateurs linéaires et les accélérateurs circulaires.

Le diagramme de Livingston (ci-contre) montre les progrès fait au cours des décennies concernant l'énergie transmise aux particules.

Les accélérateurs sont utilisés dans de nombreux domaines tels que la recherche en physique (étude des particules élémentaires) ou encore le milieu médical (traitement des cancers par radiothérapie).



**1) Exemple d'un accélérateur de particules circulaire : Le cyclotron**

Le premier cyclotron a été réalisé par Ernest Orlando Lawrence et Milton S. Livingston de l'université de Californie à Berkeley au début des années 1930.

Le cyclotron est un accélérateur de particules de taille minime : de l'ordre de  $6m^3$ . Il permet la production d'isotopes radioactifs, obtenus par l'irradiation d'une cible avec les protons accélérés par le cyclotron, et en particulier le fluor 18. Ce dernier est utilisé notamment en médecine pour fabriquer du fluorodésoxyglucose, un sucre radioactif inutilisable par la cellule, qui va s'accumuler préférentiellement dans les zones cancéreuses.

Nous nous limiterons à une description élémentaire de l'appareil.

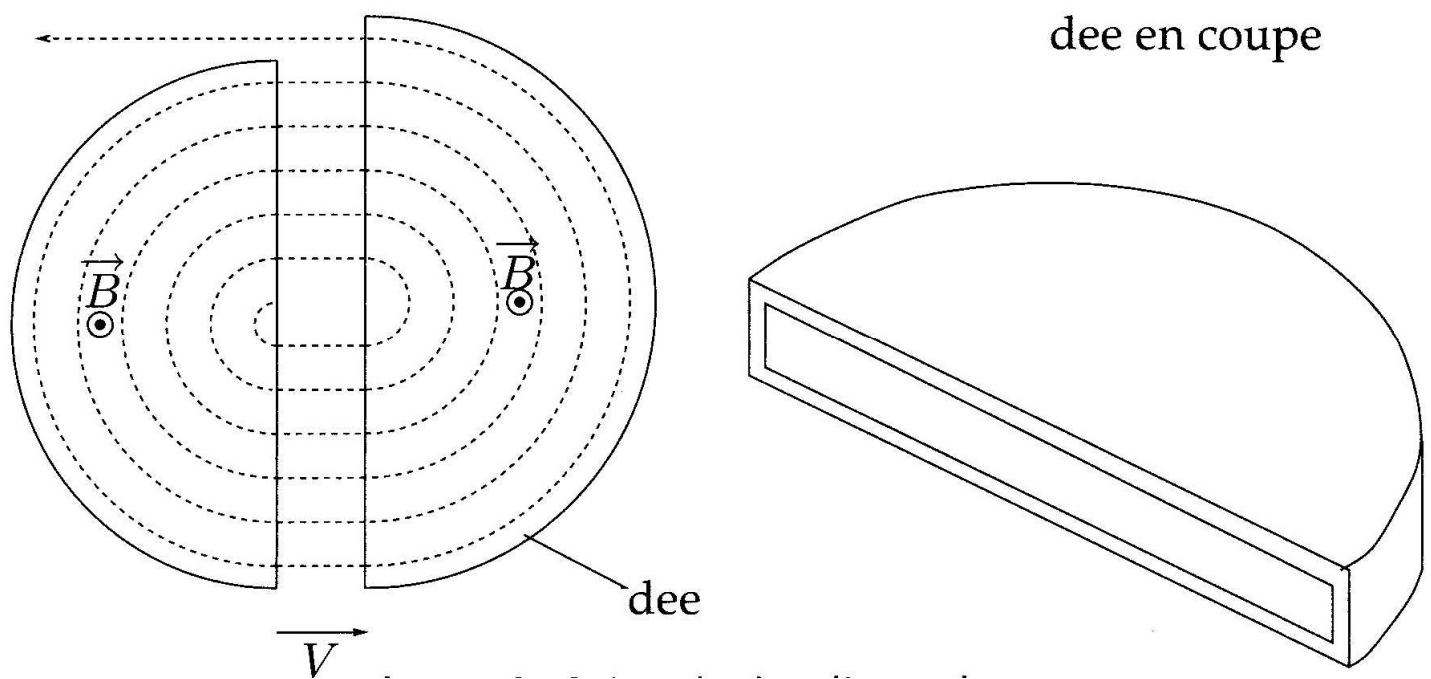
Le fonctionnement d'un cyclotron fait intervenir les actions successives :

- d'un champ  $\vec{E}$  qui permet d'accélérer linéairement les particules chargées ;
- d'un champ  $\vec{B}$  qui incurve les trajectoires particulières à vitesse constante.

Il est constitué de deux demi-cylindres creux nommés « dees » à cause de leur forme en « D » majuscules. Chaque « dee » est soumis à un même champ magnétique uniforme ( $\vec{B}$  parallèle aux génératrices du cylindre). Les deux dees sont séparés par un espace dans lequel on applique une différence de potentiel  $V$ .

- Dans chaque dee, une particule de masse  $m$  et de charge  $q$  suit un mouvement circulaire uniforme à la pulsation cyclotron  $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$ .
- Entre les deux dees, la particule est accélérée par la présence de la différence de potentiel  $V$ . Afin qu'elle soit accélérée à chaque demi-tour, il suffit que  $V$  soit alternative (par exemple sinusoïdale  $V = V_m \cos(\omega_c t)$ ).

De cette façon, le rayon de la trajectoire (en pointillés sur la figure), qui dépend de la vitesse contrairement à  $\omega_c$ , augmente donc à chaque passage entre les deux dees. **L'intérêt est de pouvoir accélérer très fortement les particules sans être contraint d'appliquer une différence de potentiel énorme.**

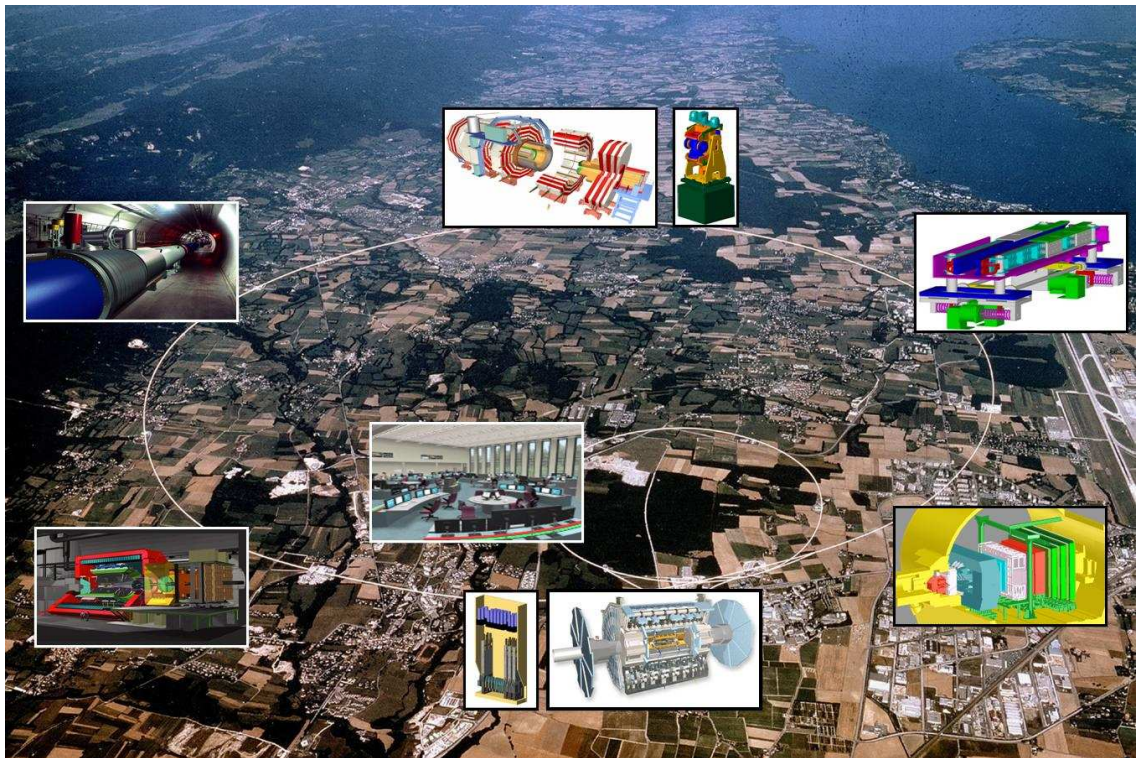


## 2) Le plus grand accélérateur du monde : le LHC

Le Grand Collisionneur de Hadrons (Large Hadron Collider ; LHC) est entré en fonctionnement en 2008. Il est situé dans un anneau de 27 kilomètres et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève. Le LHC est désormais le plus puissant des accélérateurs de particules au monde. Des protons (ou des ions) de très haute énergie circulant dans deux faisceaux tournants à contre-sens se choquent les uns contre les autres, dans le but de rechercher des indices de la supersymétrie, de la matière noire et de l'origine de la masse des particules élémentaires.

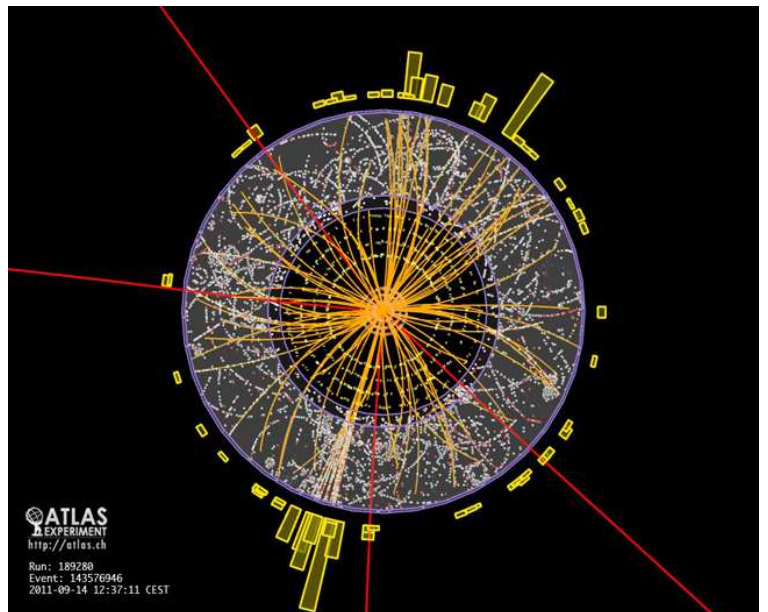


Les faisceaux se composent de paquets contenant des centaines de milliards de protons chacun. Voyageant quasiment à la vitesse de la lumière, ils sont injectés, accélérés, et maintenus en circulation pendant des heures, guidés par des milliers d'aimants supraconducteurs puissants.



Dans la majeure partie de l'anneau, les faisceaux voyagent dans deux lignes sous vide séparées, mais en quatre points d'interactions, ils se heurtent au cœur des expériences principales, appelées Atlas, CMS, Alice et LHCb. L'énergie des protons (ou des ions) est transformée au moment du choc en une myriade de particules exotiques, que les détecteurs de ces quatre expériences observent avec attention.

En juillet 2012, les détecteurs ont décelé les signes d'événements extrêmement rares témoignant de l'existence d'une nouvelle particule qui ressemblerait au très recherché boson de Higgs.



Détecteur ATLAS : collision témoignant de la présence d'un boson de Higgs.

Pour déterminer s'il s'agit vraiment du boson de Higgs du Modèle standard, cette particule liée au mécanisme qui donne une masse aux particules élémentaires, il faudra disposer d'un nombre beaucoup plus grand de données du LHC, ce qui ne pourra être obtenu qu'après le redémarrage de l'accélérateur en 2015.

De nombreuses informations et animations très instructives sont consultables sur le site du LHC : <http://www.lhc-france.fr/>